

IDEAUX FERMES D'ALGEBRES DE BEURLING ANALYTIQUES SUR LE BIDISQUE

B. BOUYA; O. EL-FALLAH & K. KELLAY

Abstract. We study the closed ideal in the Beurling algebras $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ of holomorphic function f in the bidisc such that $\sum_{n,m \geq 0} |\hat{f}(n,m)|(1+n)^\alpha(1+m)^\beta < +\infty$. We determine the function $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ such that the ideals generated by f coincide with the ideal generated by their zeros set.

1. INTRODUCTION

Soient \mathbb{D} le disque unité du plan complexe et $\mathcal{A}(\mathbb{D}^n)$ l'algèbre du polydisque, l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}^n$ et holomorphes sur \mathbb{D}^n munie de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}^n\}.$$

Lorsque B est une algèbre de Banach incluse dans $\mathcal{A}(\mathbb{D}^n)$, $f \in B$ et E est un ensemble fermé de $\overline{\mathbb{D}}^n$; on notera par:

- $I_B(f) = \overline{fB}$ l'idéal fermé de B engendré par f .
- $Z_f = \{z \in \overline{\mathbb{D}}^n : f(z) = 0\}$, l'ensemble des zéros de f .
- $I_B(E) = \{g \in B : g|_E = 0\}$, l'idéal d'annulation de B sur E .

Dans ce travail nous nous intéressons à la détermination des fonctions $f \in B$ qui satisfont $I_B(f) = I_B(Z_f)$ dans le cas où B est une algèbre de Beurling analytique à poids polynômial. Dans le cas de l'algèbre du disque, $B = \mathcal{A}(\mathbb{D})$, le théorème de Beurling-Rudin donne une caractérisation complète des idéaux fermés de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$. En particulier, si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ telle que $Z_f \subset \mathbb{T}$ alors $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(f) = I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(Z_f)$ si et seulement si, f est extérieure :

$$f(z) = \exp \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \log |f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Dans une série d'articles [6, 7, 8] motivés par le problème de Levin [12], H. Hedenmalm s'est intéressé aux idéaux fermés de certaines algèbres de fonction en plusieurs variables. Il a obtenu dans le cas de l'algèbre du bidisque les résultats suivants :

Théorème. [6, 7]

- (1) Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ telle que $Z_f \subset \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$, alors $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)}(f) = I_{\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)}(Z_f)$ si et seulement si les fonctions $f(\cdot, w)$ sont extérieures pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$ et la fonction $f(1, \cdot)$ est soit identiquement nulle soit extérieure.

- (2) Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ telle que $Z_f = \{1\} \times \overline{\mathbb{D}} \cup \overline{\mathbb{D}} \times \{1\}$, si
 $|\log |f(z, w)|| = o(1/\inf(|1 - z|, |1 - w|)), \quad z \rightarrow 1 \text{ ou } w \rightarrow 1,$
alors $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)}(f) = I_{\mathcal{A}(\mathbb{D}^2)}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}} \cup \overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$.

Pour $\alpha \geq 0$, considérons maintenant les algèbres de Beurling analytiques suivantes :

$$\mathcal{A}_\alpha^+ := \{f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n : \|f\|_\alpha = \sum_{n \geq 0} |a_n| (1 + n)^\alpha < \infty\}.$$

Dans [10], J.P. Kahane a montré que si $f \in \mathcal{A}_\alpha^+$ telle que $Z_f = \{1\}$ alors $I_{\mathcal{A}_\alpha^+}(f) = I_{\mathcal{A}_\alpha^+}(\{1\})$ si et seulement si f est extérieure. Notons que dans ce cas cette condition est équivalente à

$$\lim_{|z| \rightarrow 1^-} (1 - |z|) \log |f(z)| = 0.$$

Mentionnons également que la caractérisation des idéaux de \mathcal{A}_α^+ paraît compliqué, voir à ce sujet [5].

Pour tout $\alpha, \beta \geq 0$, on considère les algèbres de Beurling du bidisque suivantes :

$$\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+ := \{f(z, w) = \sum_{n, m \geq 0} a_{n, m} z^n w^m \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2) : \\ \|f\|_{\alpha, \beta} := \sum_{n, m \in \mathbb{N}} |a_{n, m}| (1 + n)^\alpha (1 + m)^\beta < +\infty\},$$

Dans ce travail nous étendons les résultats obtenus par H.Hedenmalm ([6, 7, 8]) aux algèbres $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$. Nous montrons les deux théorèmes suivants:

Théorème 1. Soient $(\alpha, \beta) \in [0, 1[\times]0, 1[$ et $f \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$ telle que $Z_f = \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$. Alors $I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}})$ si et seulement si les fonctions $f(\cdot, w)$ sont extérieures pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$.

Comme conséquence du Théorème 1 nous obtenons

Corollaire. Soient $(\alpha, \beta) \in [0, 1[\times]0, 1[$ et $f \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$ telle que $Z_f = \{(1, 1)\}$. Alors $I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(\{(1, 1)\})$ si et seulement si les fonctions $f(\cdot, 1)$ et $f(1, \cdot)$ sont extérieures.

Théorème 2. Soient $(\alpha, \beta) \in]0, 1[\times]0, 1[$ et $f \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$ telle que $Z_f = \{1\} \times \overline{\mathbb{D}} \cup \overline{\mathbb{D}} \times \{1\}$. Si

$$|\log |f(z, w)|| = o(1/\inf(|1 - z|, |1 - w|)), \quad z \rightarrow 1 \text{ ou } w \rightarrow 1,$$

alors $I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}} \cup \overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$.

Notons que pour $\alpha \geq 1$ ou $\beta \geq 1$, des résultats analogues, faisant intervenir les dérivées partielles de f , peuvent être obtenus de la même manière.

Le paragraphe 2 sera consacré à l'étude de la notion de la δ -visibilité qui jouera un rôle fondamental dans la preuve du théorème 1 et du théorème 2.

2. LA δ -VISIBILITE

Dans cette partie nous rappelons la notion de la δ -visibilité introduite et étudiée dans [1, 2, 3, 4, 13]. Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire. L'ensemble des caractères de A sera noté \mathcal{M}_A . La transformation de Gelfand associée à A est l'application:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_A : A &\longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{M}_A) \\ x &\longrightarrow \hat{x} : \phi \in \mathcal{M}_A \longrightarrow \hat{x}(\phi) = \phi(x), \end{aligned} \quad (1)$$

où $\mathcal{C}(\mathcal{M}_A)$ est l'algèbre des fonctions continues sur \mathcal{M}_A .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in A^n$, on pose

$$\begin{cases} \|f\| &:= \left(\sum_{k=1}^n \|f_k\|^2 \right)^{1/2} \\ \delta_f &:= \inf_{\phi \in \mathcal{M}_A} \left(\sum_{k=1}^n |\hat{f}_k(\phi)|^2 \right)^{1/2} \end{cases}$$

Définition 3. Soit $0 < \delta \leq 1$. On dit que le spectre de A est δ - n -visible s'il existe une constante $\mathcal{C}_n(\delta)$, qui dépend de δ et de n , telle que pour tout $f = (f_1, f_2, \dots, f_n) \in A^n$, $\|f\| \leq 1$ vérifiant $\delta_f \geq \delta$, il existe $g = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in A^n$ tels que

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n f_k g_k = 1, \\ \|g\| \leq \mathcal{C}_n(\delta). \end{cases}$$

Posons

$$\mathcal{C}_n(\delta, A) := \sup_f \left\{ \inf \left\{ \|g\| : g = (g_1, \dots, g_n) \in A^n \text{ et } \sum_{k=1}^n g_k f_k = 1 \right\} \right\},$$

le sup étant pris sur les $f = (f_1, \dots, f_n) \in A^n$ telles que $\delta_f \geq \delta$ et $\|f\| \leq 1$. En particulier

$$\mathcal{C}_1(\delta, A) := \sup \{ \|f^{-1}\| : \|f\| \leq 1 \text{ et } |\hat{f}(\phi)| \geq \delta \quad (\phi \in \mathcal{M}_A) \}$$

2.1. La δ -1-visibilité pour les algèbres de Beurling. Considérons les algèbres de Beurling à poids suivantes

$$\mathcal{A}_\alpha = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) : \|f\|_\alpha := \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| (1 + |n|)^\alpha < +\infty \right\}.$$

Munie du produit ponctuel et de la norme $\|\cdot\|_\alpha$, \mathcal{A}_α est une algèbre de Banach commutative unitaire. En identifiant son spectre à \mathbb{T} , la transformation de Gelfand devient : $\mathcal{G}_{\mathcal{A}_\alpha}(f) = f$ pour tout $f \in \mathcal{A}_\alpha$. Il a été démontré dans [2, 3], que le spectre de \mathcal{A}_α est δ -1-visible pour tout $0 < \delta \leq 1$. Plus précisément pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on a $\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{A}_\alpha) \leq c/\delta^{2+1/\alpha}$.

Ce résultat peut être étendu aux algèbres de Beurling en plusieurs variables. Soient $\alpha, \beta > 0$ et soit $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}$ l'algèbre de Beurling définie par:

$$\mathcal{A}_{\alpha, \beta} = \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^2) : \|f\|_{\alpha, \beta} := \sum_{n, m \in \mathbb{Z}^2} |\hat{f}(n, m)| (1 + |n|)^\alpha (1 + |m|)^\beta < +\infty \right\},$$

Munie du produit ponctuel et de la norme $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$, $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}$ est une algèbre de Banach commutative et unitaire dont le spectre peut être identifié à \mathbb{T}^2 . Nous avons le résultat suivant:

Lemme 4. Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Posons $\gamma = \inf\{1, \alpha, \beta\}$. On a

$$\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{A}_{\alpha, \beta}) \leq c\delta^{-(3 + \frac{1}{\gamma}(1 + \alpha + \beta))}, \quad 0 < \delta < 1,$$

où c est une constante qui dépend seulement de α et de β .

Preuve. Soit $f \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}$ telle que $|f| \geq \delta > 0$ et telle que $\|f\|_{\alpha, \beta} \leq 1$. Pour tout $0 < \rho < 1$, on pose

$$f_\rho(z, w) := \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n, m) \rho^{|n| + |m|} z^n w^m, \quad \rho \leq |z| \leq 1/\rho \text{ et } \rho \leq |w| \leq 1/\rho.$$

Posons $a_{n, m} = \hat{f}(n, m)$ et $\gamma = \inf\{\alpha, \beta, 1\}$. Pour $z, w \in \mathbb{T}$, on a

$$\begin{aligned} |f(z, w) - f_\rho(z, w)| &= \left| \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_{n, m} (1 - \rho^{|n| + |m|}) z^n w^m \right| \\ &\leq \sup_{n, m \in \mathbb{Z}} \frac{1 - \rho^{|n| + |m|}}{(1 + |n|)^\alpha (1 + |m|)^\beta} \leq 2(1 - \rho)^\gamma. \end{aligned}$$

Soit ρ tel que $2(1 - \rho)^\gamma = \delta/3$. Le rayon spectral de $(f - f_\rho)f_\rho^{-1}$ est strictement inférieur à 1 et

$$f^{-1} = \sum_{p \in \mathbb{N}} (f - f_\rho)^p f_\rho^{-p-1}. \quad (2)$$

Soit $p \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \|(f - f_\rho)^p\|_{\alpha, \beta} &= \left\| \left(\sum_{n, m \in \mathbb{Z}} a_{n, m} (1 - \rho^{|n| + |m|}) z^n w^m \right)^p \right\|_{\alpha, \beta} \\ &\leq \sup_{n_i, m_j \in \mathbb{Z}} \frac{(1 - \rho^{|n_1| + |m_1|}) \dots (1 - \rho^{|n_p| + |m_p|})}{(1 + |n_1|)^\alpha (1 + |m_1|)^\beta \dots (1 + |n_p|)^\alpha (1 + |m_p|)^\beta} \times \\ &\quad \times (1 + |n_1 + \dots + n_p|)^\alpha (1 + |m_1 + \dots + m_p|)^\beta \quad (3) \end{aligned}$$

Puisque $(1 + |n_1 + \dots + n_p|) \leq p \max_{1 \leq k \leq p} (1 + |n_k|)$,

$$\begin{aligned} \|(f - f_\rho)^p\|_{\alpha, \beta} &\leq p^{\alpha + \beta} \sup_{n_i, m_j \in \mathbb{Z}} \sup_{k=1}^p \sup_{l=1}^p \prod_{q=1}^p \frac{(1 - \rho^{|n_q| + |m_q|})}{(1 + |n_q|)^\alpha (1 + |m_q|)^\beta} (1 + |n_k|)^\alpha (1 + |m_l|)^\beta \\ &\leq p^{(\alpha + \beta)} (2(1 - \rho)^\gamma)^{p-2}. \quad (4) \end{aligned}$$

Posons $\widehat{f_\rho^{-p-1}}(n, m) = b_{n, m}$, $p \geq 0$. L'inégalité de Hölder et l'égalité de Plancherel–Parseval, nous donne

$$\begin{aligned} \|f_\rho^{-p-1}\|_{\alpha, \beta} &\leq \\ \left(\sum_{n, m \in \mathbb{Z}} \rho^{2(|n|+|m|)} (1+|n|)^{2\alpha} (1+|m|)^{2\beta} \right)^{1/2} &\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |b_{n, m}|^2 \rho^{-2|n|-2|m|} \right)^{1/2} \right. \\ &\leq \frac{c}{(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}} \left(\int_{\rho\mathbb{T} \cup \rho^{-1}\mathbb{T}} \int_{\rho\mathbb{T} \cup \rho^{-1}\mathbb{T}} |f_\rho^{-p-1}(\xi, \zeta)|^2 d\xi d\zeta \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{c}{\delta^{p+1}(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}}. \end{aligned} \quad (5)$$

De (2), (4) et (5) on en déduit que

$$\begin{aligned} \|f^{-1}\|_{\alpha, \beta} &\leq \sum_{p \geq 0} \|(f - f_\rho)^p\|_{\alpha, \beta} \|f_\rho^{-p-1}\|_{\alpha, \beta} \\ &\leq \|f_\rho^{-1}\|_{\alpha, \beta} + \|f_\rho^{-2}\|_{\alpha, \beta} + \frac{c}{2(1-\rho)^{2\gamma+\alpha+\beta+1}} \sum_{p \geq 2} \frac{p^{(\alpha+\beta)} (2(1-\rho)^\gamma)^p}{\delta^{p+1}} \\ &\leq \frac{c}{\delta^3(1-\rho)^{\alpha+\beta+1}} = \frac{c}{\delta^{3+\frac{1}{\gamma}(\alpha+\beta+1)}}. \end{aligned}$$

□

2.2. La δ -2-visibilité de l'algèbre $\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$. La δ -2-visibilité pour une algèbre de Banach commutative et unitaire revient à la résolution de l'identité de Bezout avec contrôle des normes des solutions. Le cas d'une variable à été traité dans [4]. Nous étendons ce résultat au cas de plusieurs variables.

Théorème 5. *Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$ et $0 < \delta$ telles que*

$$\delta^2 \leq |f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 \leq 1, \quad z \in \mathbb{D}^2.$$

Il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$ telles que

$$\begin{cases} f_1 h_1 + f_2 h_2 = 1, \\ \|h_1\|_{\alpha, \beta}^2 + \|h_2\|_{\alpha, \beta}^2 \leq \delta^{-c_{\alpha, \beta}}. \end{cases}$$

où $c_{\alpha, \beta}$ est une constante qui ne dépend que de α et de β .

Ce théorème signifie que

$$\mathcal{C}_2(\delta, \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+) \leq \delta^{-c_{\alpha, \beta}}, \quad 0 < \delta \leq 1.$$

Compte tenu du théorème 4, la preuve du théorème 5 est une conséquence directe du lemme suivant:

Lemme 6. *Soient $\alpha, \beta > 0$. On a*

$$\mathcal{C}_2(\delta, \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+) \leq c \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha, \beta}), \quad 0 < \delta \leq 1,$$

où c est une constante universelle.

Pour chaque fonction $g \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ et pour $0 \leq r, s \leq 1$ on définit la fonction $(g)_{r,s} \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ par

$$(g)_{r,s}(z, w) = g(rz, sw) \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Soit $\partial_z = \partial/\partial z$ la dérivée partielle par rapport à la variable z et on désigne par $\text{Hol}(\mathcal{U})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur l'ouvert \mathcal{U} . Nous avons besoin du sous-lemme suivant:

Sous-lemme 7. *Soient \mathcal{U} un voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}^2$ et $a, b \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{U})$ tels que*

$$b(z, w) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{a(\xi, w)}{\xi - z} dA(\xi), \quad z, w \in \mathbb{D},$$

où dA est la mesure d'aire. On a

$$\begin{aligned} \widehat{b}(n, m) &= 0, & (n, m) &\in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \\ \widehat{b}(n, m) &= 2 \int_0^1 \widehat{(a)_{r,1}}(n+1, m) r^{-n} dr, & (n, m) &\notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De plus, si $f \in \text{Hol}(\mathcal{U})$, alors

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{fb}(n, m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta \leq 2 \|f\|_{\alpha,\beta} \int_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr.$$

Preuve. Par le théorème de convergence dominée on a

$$b(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{a(\xi, e^{i\varphi})}{\xi - e^{i\theta}} dA(\xi).$$

D'après le théorème de Fubini on obtient:

$$\widehat{b}(n, m) = -\frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{D}} \left(\int_0^{2\pi} a(\xi, e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-in\theta}}{\xi - e^{i\theta}} d\theta \right) dA(\xi).$$

Si $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$, alors $\widehat{b}(n, m) = 0$. Sinon

$$\begin{aligned} \widehat{b}(n, m) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{D}} \left(\int_0^{2\pi} a(\xi, e^{i\varphi}) e^{-im\varphi} d\varphi \right) \xi^{-n-1} dA(\xi) \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} a(re^{i\theta}, e^{i\varphi}) e^{-i(n+1)\theta} e^{-im\varphi} d\theta d\varphi \right) r^{-n} dr \\ &= 2 \int_0^1 \widehat{(a)_{r,1}}(n+1, m) r^{-n} dr. \end{aligned}$$

Puisque

$$\widehat{fb}(n, m) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^m \widehat{b}(-l, k) \widehat{f}(n+l, m-k),$$

alors

$$\begin{aligned} & \sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{fb}(n, m)| (1+n)^{\alpha} (1+m)^{\beta} \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k \leq m} \widehat{b}(-l, k) \widehat{f}(n+l, m-k) (1+n)^{\alpha} (1+m)^{\beta} \right| \\ &\leq \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k \leq m} |\widehat{b}(-l, k)| (1+|k|)^{\beta} |\widehat{f}(n+l, m-k)| (1+n+l)^{\alpha} (1+m-k)^{\beta} \\ &\leq \|f\|_{\alpha, \beta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{b}(-l, k)| (1+|k|)^{\beta} \\ &\leq \|f\|_{\alpha, \beta} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 |\widehat{(a)_{r,1}}(1-l, k)| (1+|k|)^{\beta} r^l dr \\ &\leq 2 \|f\|_{\alpha, \beta} \int_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} dr. \quad (6) \end{aligned}$$

□

Preuve du lemme 6. Soit $\delta \in]0, 1]$ et soient $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$ satisfaisant

$$\begin{cases} \|f_1\|_{\alpha, \beta}^2 + \|f_2\|_{\alpha, \beta}^2 \leq 1, \\ F(z, w) = |f_1(z, w)|^2 + |f_2(z, w)|^2 \geq \delta^2. \end{cases} \quad (7)$$

Supposons d'abord que f_1 et f_2 sont holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}^2$. On pose

$$\phi_i = \frac{\overline{f_i}}{F}, \quad i = 1, 2.$$

Comme dans la résolution du problème de la couronne [11], nous allons corriger la solution (ϕ_1, ϕ_2) de l'équation $f_1\phi_1 + f_2\phi_2 = 1$, pour aboutir à une solution holomorphe au voisinage du bidisque. D'abord, on commence par corriger les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 par rapport à la première variable z , soit

$$\begin{cases} g_1 &= \phi_1 + f_2 b, \\ g_2 &= \phi_2 - f_1 b, \\ \overline{\partial}_z b &= \phi_1 \overline{\partial}_z \phi_2 - \phi_2 \overline{\partial}_z \phi_1 = a. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$ et que les fonctions g_i ($i = 1, 2$) sont holomorphes sur le disque, par rapport à la première variable. Ensuite,

nous corrigeons à nouveau les fonctions obtenues g_1 et g_2 comme suit

$$\begin{cases} h_1 &= g_1 + f_2 d, \\ h_2 &= g_2 - f_1 d, \\ \bar{\partial}_w d &= g_1 \bar{\partial}_w g_2 - g_2 \bar{\partial}_w g_1 = c. \end{cases}$$

On obtient ainsi des fonctions holomorphes sur le bidisque h_1, h_2 satisfaisant l'identité de Bezout suivante $f_1 h_1 + f_2 h_2 = 1$.

Les solutions b et d sont données par:

$$b(z, w) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{a(\xi, w)}{\xi - z} dA(\xi) \quad \text{et} \quad d(z, w) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{c(z, \zeta)}{\zeta - w} dA(\zeta) \quad .$$

Dans ce qui suit nous allons majorer les normes de h_1 et de h_2 . On a

$$\begin{aligned} \|h_1\|_{\alpha, \beta} &= \|\phi_1 + f_2 b + f_2 d\|_{\alpha, \beta} \\ &\leq \|\phi_1\|_{\alpha, \beta} + \sum_{n, m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 b}(n, m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta \\ &\quad + \sum_{n, m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 d}(n, m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta, \end{aligned} \quad (8)$$

On a

$$\|\phi_1\|_{\alpha, \beta} \leq \|F^{-1}\|_{\alpha, \beta} \|f_1\|_{\alpha, \beta} \leq \mathcal{C}_1(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha, \beta}) \|f_1\|_{\alpha, \beta}. \quad (9)$$

D'après le sous-lemme 7, on obtient

$$\sum_{n, m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 b}(n, m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta \leq 2 \|f_2\|_{\alpha, \beta} \int_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} dr. \quad (10)$$

Puisque

$$\begin{aligned} \|(a)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} &= \left\| \left(\overline{(\partial_z f_1)_{r,1} (f_2)_{r,1}} - \overline{(f_1)_{r,1} (\partial_z f_2)_{r,1}} \right) (F^{-2})_{r,1} \right\|_{\alpha, \beta} \\ &\leq \|(F^{-1})_{r,1}\|_{\alpha, \beta}^2 (\|(\partial_z f_1)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} \|(f_2)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} + \|(f_1)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} \|(\partial_z f_2)_{r,1}\|_{\alpha, \beta}) \\ &\leq \mathcal{C}_1^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha, \beta}) (\|(\partial_z f_1)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} \|f_2\|_{\alpha, \beta} + \|f_1\|_{\alpha, \beta} \|(\partial_z f_2)_{r,1}\|_{\alpha, \beta}), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} dr &\leq \mathcal{C}_1^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha, \beta}) \times \\ &\quad \times \left(\|f_2\|_{\alpha, \beta} \int_0^1 \|(\partial_z f_1)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} dr + \|f_1\|_{\alpha, \beta} \int_0^1 \|(\partial_z f_2)_{r,1}\|_{\alpha, \beta} dr \right). \end{aligned}$$

Pour $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \|(\partial_z f_i)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr &= \int_0^1 \sum_{n,m=0}^{\infty} n |\widehat{f_i}(n,m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta r^{n-1} dr \\ &\leq \|f_i\|_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_0^1 \|(a)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} dr \leq 2 \mathcal{C}_1^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta}. \quad (11)$$

En combinant les inégalités (10) et (11), on obtient

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 b}(n,m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta \leq 4 \mathcal{C}_1^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta}. \quad (12)$$

Dans ce qui suit nous allons majorer la quantité suivante

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 d}(n,m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta.$$

En utilisant le sous-lemme 7 on obtient

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 d}(n,m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta \leq 2 \|f_2\|_{\alpha,\beta} \int_0^1 \|(c)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} ds, \quad (13)$$

où

$$c = g_1 \overline{\partial_w} g_2 - g_2 \overline{\partial_w} g_1 = \phi_1 \overline{\partial_w} \phi_2 - \phi_2 \overline{\partial_w} \phi_1 - \overline{\partial_w} b.$$

De la même façon que dans l'équation (11) on peut montrer que

$$\int_0^1 \left\| \left(\phi_1 \overline{\partial_w} \phi_2 - \phi_2 \overline{\partial_w} \phi_1 \right)_{1,s} \right\|_{\alpha,\beta} ds \leq 2 \mathcal{C}_1^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta}. \quad (14)$$

Puisque

$$\overline{\partial_w} b(z, sw) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\overline{\partial_w} a(\xi, sw)}{\xi - z} dA(\xi), \quad z, w \in \mathbb{D},$$

d'après le sous-lemme 7, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{(\overline{\partial_w} b)_{1,s}}(n, m) &= 0, & (n, m) &\in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, \\ \widehat{(\overline{\partial_w} b)_{1,s}}(n, m) &\leq 2 \int_0^1 |(\overline{\partial_w} a)_{r,s}| (n+1, m) r^{-n} dr, & (n, m) &\notin \mathbb{N} \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\int_0^1 \|(\overline{\partial_w} b)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} ds \leq 2 \int_0^1 \int_0^1 \|(\overline{\partial_w} a)_{r,s}\|_{\alpha,\beta} dr ds.$$

Comme $a = \left(\overline{\partial_z(f_1)f_2} - \overline{f_1\partial_z f_2} \right) F^{-2}$, on a

$$\begin{aligned} \overline{\partial_w a} &= \left(\overline{\partial_z \partial_w(f_1)f_2 + \partial_z f_1 \partial_w f_2 - \partial_w f_1 \partial_z f_2 - f_1 \partial_z \partial_w f_2} \right) F^{-2} - \\ &\quad 2 \left(\overline{\partial_z(f_1)f_2} - \overline{f_1 \partial_z(f_2)} \right) \left(f_1 \overline{\partial_w f_1} + f_2 \overline{\partial_w f_2} \right) F^{-3}. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\overline{\partial_z \partial_w(f_1)f_2 + \partial_z f_1 \partial_w f_2 - \partial_w f_1 \partial_z f_2 - f_1 \partial_z \partial_w f_2} \right)_{r,s} \left(F^{-2} \right)_{r,s} \right\|_{\alpha,\beta} \\ &\leq \mathcal{C}_1^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \left(\|\partial_z \partial_w(f_1)_{r,s}\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta} + \|\partial_z(f_1)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \|\partial_w(f_2)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} \right. \\ &\quad \left. + \|\partial_w(f_1)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} \|\partial_z(f_2)_{r,1}\|_{\alpha,\beta} + \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|\partial_z \partial_w(f_2)_{r,s}\|_{\alpha,\beta} \right). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\overline{\partial_z(f_1)f_2} - \overline{f_1 \partial_z(f_2)} \right)_{r,s} \left(f_1 \overline{\partial_w f_1} + f_2 \overline{\partial_w f_2} \right)_{r,s} (F^{-3})_{r,s} \right\|_{\alpha,\beta} \\ &\leq \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \left(\|(\partial_z(f_1))_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta} + \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|\partial_z((f_2))_{r,1}\|_{\alpha,\beta} \right) \times \\ &\quad \times \left(\|f_1\|_{\alpha,\beta} \|(\partial_w f_1)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} + \|f_2\|_{\alpha,\beta} \|(\partial_w f_2)_{1,s}\|_{\alpha,\beta} \right). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 \|(\overline{\partial_w a})_{r,s}\|_{\alpha,\beta} dr ds \\ &\leq 4 \mathcal{C}_1^2(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta} + 2 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta} \\ &\leq 6 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \|(\overline{\partial_w b})_{1,s}\|_{\alpha,\beta} ds \leq 12 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta} \|f_2\|_{\alpha,\beta}. \quad (15)$$

En combinant (13), (14) et (15), on obtient

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} |\widehat{f_2 d}(n, m)| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta \leq 28 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta}. \quad (16)$$

Les inégalités (8), (9), (12) et (16) entraînent que

$$\|h_1\|_{\alpha,\beta} \leq 33 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_1\|_{\alpha,\beta}.$$

De la même façon on peut montrer que

$$\|h_2\|_{\alpha,\beta} \leq 33 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}) \|f_2\|_{\alpha,\beta}.$$

On obtient donc

$$(\|h_1\|_{\alpha,\beta}^2 + \|h_2\|_{\alpha,\beta}^2)^{1/2} \leq 33 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}).$$

On suppose maintenant que f_1 et f_2 ne sont pas holomorphes au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}^2$. On considère les fonctions $(f_1)_{r,r}$ et $(f_2)_{r,r}$ ($r < 1$). Donc il existe $h_{1,r}, h_{2,r} \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ tel que

$$\begin{cases} (f_1)_{r,r} h_{1,r} + (f_2)_{r,r} h_{2,r} = 1, \\ (\|h_{1,r}\|_{\alpha,\beta}^2 + \|h_{2,r}\|_{\alpha,\beta}^2)^{1/2} \leq 33 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}), \quad r < 1. \end{cases}$$

Puisque $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ peut être identifié comme le dual de

$$\ell_{\alpha,\beta}^\infty(\mathbb{N}^2) := \{(u_{n,m})_{n,m \geq 0} : \sup_{n,m \geq 0} \frac{|u_{n,m}|}{(1+n)^\alpha(1+m)^\beta} < \infty\}.$$

La boule unité fermée de $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ est compacte pour la topologie $*$ -faible. On en déduit qu'il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ tels que

$$\begin{cases} f_1 h_1 + f_2 h_2 = 1, \\ (\|h_1\|_{\alpha,\beta}^2 + \|h_2\|_{\alpha,\beta}^2)^{1/2} \leq 33 \mathcal{C}_1^3(\delta^2, \mathcal{A}_{\alpha,\beta}). \end{cases}$$

Ce qui termine la preuve du lemme 6.

3. PREUVE DU THEOREME 1

Lemme 8. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{D} \times \overline{\mathbb{D}}$. Alors il existe $M > 0$ tel que*

$$\frac{1}{|f(z, w)|} \leq e^{\frac{M}{1-|z|}}, \quad z, w \in \mathbb{D}.$$

Preuve. Supposons que $\|f\|_\infty \leq 1$. Puisque l'application $\log |f(\cdot, w)|^{-1}$ est positive et harmonique sur \mathbb{D} , il existe une mesure positive $\mu = \mu_w$ sur \mathbb{T} telle que

$$\log |f(z, w)|^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\varphi} - z|^2} \log |f(e^{i\varphi}, w)|^{-1} d\mu(\varphi) \quad (w \in \mathbb{D}).$$

On obtient donc

$$\log |f(z, w)|^{-1} \leq 2 \log |f(0, w)|^{-1} (1 - |z|)^{-1}.$$

Par conséquent

$$\log |f(z, w)|^{-1} \leq M(1 - |z|)^{-1},$$

où $M = 2 \sup\{\log |f(0, w)|^{-1} : w \in \overline{\mathbb{D}}\}$. □

Le résultat suivant est dû à H.Hedenmalm [6], proposition 1.2.

Lemme 9. *Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{D}^2)$ telle que $Z_f \subset \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes:*

- (1) $f(\cdot, w)$ est une fonction extérieure pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$,
- (2) $\lim_{r \rightarrow 1^-} (1 - r) \log |f(r, w)| = 0$ pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$,
- (3) $\lim_{r \rightarrow 1^-} \inf_{w \in \overline{\mathbb{D}}} (1 - r) \log |f(r, w)| = 0$.

Nous aurons besoin du principe de Phragmén–Lindelöf suivant (voir [8]).

Lemme 10. *Soit ϕ une fonction analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ et soit $\varepsilon > 0$. On suppose que*

$$\begin{aligned} (i) \quad & |\phi(\lambda)| \leq \frac{c_1}{(|\lambda| - 1)^N} \quad , \quad 1 < |\lambda| < 2, \\ (ii) \quad & |\phi(\lambda)| \leq c_2 \exp \frac{c_3}{1 - |\lambda|} \quad , \quad |\lambda| < 1, \\ (iii) \quad & |\phi(x)| \leq c_\varepsilon \exp \frac{\varepsilon}{1 - x} \quad , \quad x < 1, \end{aligned}$$

où les c_1, c_2, c_3 sont des constantes positives, N est un entier et c_ε est une constante qui dépend de ε . Alors ϕ est un polynôme en $\frac{1}{1-\lambda}$ de degré inférieur ou égal à N .

Preuve du Théorème 1. Supposons que $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f) = I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(Z_f)$. Il est clair que pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$ on a $I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(f(\cdot, w)) = I_{\mathcal{A}(\mathbb{D})}(Z_{f(\cdot, w)})$ et donc $f(\cdot, w)$ est extérieure.

Supposons maintenant que $\|f\|_{\alpha,\beta} \leq 1$ et que $f(\cdot, w)$ est extérieure pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$. Notons par π la surjection canonique sur $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$ associée à $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f)$, et par u la fonction définie par $u(z, w) = z$. Comme $Z_f = \{1\} \times \overline{\mathbb{D}}$, le spectre de $\pi(u)$ est réduit au singleton $\{1\}$. Par conséquent l'application

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \pi(u))^{-1}$$

est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$. Nous allons montrer que ϕ satisfait les trois conditions du Lemme 10. Pour $1 < |\lambda| < 2$ on a:

$$\|\phi(\lambda)\| \leq \sum_{n \geq 0} \|\pi(u)^n \lambda^{-n-1}\|_{\alpha,\beta} \leq \sum_{n \geq 0} |\lambda|^{-n-1} (1+n)^\alpha \leq \frac{c}{(|\lambda| - 1)^{1+\alpha}}. \quad (17)$$

Pour $|\lambda| < 1$, on pose

$$L_\lambda(f)(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z, w) - f(\lambda, w)}{z - \lambda} & \text{si } z \neq \lambda \\ \frac{\partial}{\partial z} f(\lambda, w) & \text{si } z = \lambda. \end{cases} \quad (18)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \|L_\lambda(f)\|_{\alpha,\beta} &= \left\| \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} \left(\frac{z^n - \lambda^n}{z - \lambda} \right) w^m \right\|_{\alpha,\beta} = \\ &= \left\| \sum_{n,m=0}^{\infty} a_{n,m} (z^{n-1} + z^{n-2}\lambda + \dots + \lambda^{n-1}) w^m \right\|_{\alpha,\beta} \leq \frac{\|f\|_{\alpha,\beta}}{1 - |\lambda|} \leq \frac{1}{1 - |\lambda|}. \end{aligned}$$

De l'équation (18), on a

$$\|\phi(\lambda)\| \leq \|\pi(L_\lambda(f))\|_{\alpha,\beta} \|(f(\lambda, \cdot))^{-1}\|_\beta \leq \frac{1}{1 - |\lambda|} \|(f(\lambda, \cdot))^{-1}\|_\beta.$$

On pose

$$\delta(\lambda) = \inf\{|f(\lambda, w)| : w \in \mathbb{D}\}.$$

Puisque $\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{A}_\beta) \leq c/\delta^{2+1/\beta}$ on obtient

$$\|\phi(\lambda)\| \leq \frac{C}{(1-|\lambda|)(\delta(\lambda))^{2+1/\beta}}. \quad (19)$$

D'après le lemme 8, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|\phi(\lambda)\| \leq e^{\frac{M}{1-|\lambda|}}, \quad |\lambda| < 1. \quad (20)$$

Puisque $f(\cdot, w)$ est extérieure pour tout $w \in \overline{\mathbb{D}}$, d'après le lemme 9, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c_\varepsilon > 0$ telle que

$$\delta(r) \geq c_\varepsilon e^{\frac{-\varepsilon}{1-r}}, \quad 0 < r < 1. \quad (21)$$

On obtient alors

$$\|\phi(r)\| \leq c_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{1-r}}, \quad 0 < r < 1. \quad (22)$$

Soit $g \in (\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+/I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f))^*$, le dual de $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+/I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f)$. D'après les équations (17), (20) et (22), la fonction

$$\lambda \longrightarrow \phi_g(\lambda) := \langle \phi(\lambda), g \rangle$$

vérifie les conditions du lemme 10. On en déduit que ϕ_g est un polynôme en $\frac{1}{1-\lambda}$ de degré 1. Donc $\pi(1-u) = 0$ et $I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(f) \supseteq I_{\mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}})$. L'autre inclusion est triviale. Ce qui termine la preuve du théorème 1.

4. PREUVE DU THEOREME 2

Commençons d'abord par établir quelque lemmes qui nous seront utiles dans la preuve du théorème 2.

Lemme 11. *Soit $f \in H^\infty(\mathbb{D}^2)$ et soient $\alpha, \beta \in [0, 1[$. On suppose que $f(\cdot, 0), \partial_z f(\cdot, 0) \in \mathcal{A}_\alpha^+$ et que $f(0, \cdot), \partial_w f(0, \cdot) \in \mathcal{A}_\beta^+$. S'il existe $0 < \varepsilon < 2 \inf\{(1-\alpha), (1-\beta)\}$ tel que*

$$\int_{\mathbb{D}^2} \left| \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial w^2} f(z, w) \right|^2 (1-|z|)^{2(1-\alpha)-\varepsilon} (1-|w|)^{2(1-\beta)-\varepsilon} dA(z) dA(w) < +\infty,$$

alors $f \in \mathcal{A}_{\alpha,\beta}^+$.

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned}
f(z, w) &= \sum_n \left(\sum_m a_{n,m} w^m \right) z^n \\
&= \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{m \geq 2} a_{n,m} w^m \right) z^n + \sum_{n \geq 0} a_{n,0} z^n + \sum_{n \geq 0} a_{n,1} z^n w + \\
&\quad + \sum_{m \geq 2} a_{0,m} w^m + \sum_{m \geq 2} a_{1,m} z w^m. \\
&= \sum_{n \geq 2} \left(b_n(w) \right) z^n + f(z, 0) + w \partial_w f(z, 0) \\
&\quad + (f(0, w) - a_{0,0} - a_{0,1} w) + z \partial_z f(0, w) - a_{1,0} - a_{1,1} w.
\end{aligned}$$

où $b_n(w) = \sum_{m \geq 2} a_{n,m} w^m$. Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 2} \sum_{m \geq 2} |a_{n,m}| (1+n)^\alpha (1+m)^\beta &= \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{m \geq 2} |a_{n,m}| (1+m)^\beta \right) (1+n)^\alpha \\
&\leq \left(\sum_{m \geq 2} \frac{1}{(1+m)^{1+\epsilon}} \right)^{1/2} \sum_{n \geq 2} \left(\sum_{m \geq 2} |a_{n,m}|^2 (1+m)^{2\beta+1+\epsilon} \right)^{1/2} (1+n)^\alpha \\
&\leq c_{\epsilon, \beta} \sum_{n \geq 2} \left(\int_{\mathbb{D}} \left| \frac{\partial^2 b_n}{\partial w^2}(w) \right|^2 (1-|w|^2)^{2(1-\beta)-\epsilon} dA(w) \right)^{1/2} (1+n)^\alpha \\
&\leq c_{\epsilon, \beta} \left(\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(1+n)^{1+\epsilon}} \right)^{1/2} \times \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{D}} \sum_{n \geq 2} \left(\left| \frac{\partial^2 b_n}{\partial w^2}(w) \right|^2 (1+n)^{2\alpha+1+\epsilon} \right) (1-|w|^2)^{2(1-\beta)-\epsilon} dA(w) \right)^{1/2} \\
&\leq c_{\epsilon, \alpha, \beta} \int_{\mathbb{D}^2} \left| \frac{\partial^4 f}{\partial z^2 \partial w^2}(z, w) \right|^2 (1-|z|^2)^{2(1-\alpha)-\epsilon} (1-|w|^2)^{2(1-\beta)-\epsilon} dA(z) dA(w).
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Lemme 12. Soit u la fonction définie sur \mathbb{D}^2 par

$$u(z, w) := \frac{(1-z)(1-w)}{[(1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}]^2}.$$

Alors u vérifie les propriétés suivantes:

- (1) $|u(z, w)| \asymp \inf\{|1-z|, |1-w|\},$
- (2) $\text{Im}(u) := \{u(z, w) : (z, w) \in \mathbb{D}^2\} \subset \{z \in \mathbb{D} : |1-z| \leq 1\},$
- (3) $u^2 \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+.$

Preuve. Pour montrer (1), il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} |(1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}| &\geq \operatorname{Re} [(1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}] \\ &\geq \max\{\operatorname{Re} (1-z)^{1/2}, \operatorname{Re} (1-w)^{1/2}\} \geq \cos \frac{\pi}{4} \max\{|1-z|^{1/2}, |1-w|^{1/2}\}. \end{aligned}$$

(2). Puisque $\{z \in \mathbb{D} : |1-z| \leq 1\} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq |z|^2/2\}$, pour $(z, w) \in \mathbb{D}^2$, $\operatorname{Re}(1/(1-z)) \geq 1/2$ et $\operatorname{Re}(1/(1-w)) \geq 1/2$ et

$$\operatorname{Re} \frac{u(z, w)}{|u(z, w)|^2} = \operatorname{Re} \left[\left(\frac{1}{1-z} \right)^{1/2} + \left(\frac{1}{1-w} \right)^{1/2} \right]^2 \geq \frac{1}{2}.$$

Donc $u(z, w) \in \{z \in \mathbb{D} : |1-z| \leq 1\}$.

(3). Nous avons

$$\frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial w^2} u^2(z, w) = \frac{105}{2} \frac{(1-z)(1-w)}{[(1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}]^8} - \frac{45}{2} \frac{(1-z)(1-w)}{[(1-z)^{1/2} + (1-w)^{1/2}]^6}.$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}^2} \left| \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial w^2} u^2(z, w) \right|^2 (1-|z|)^{1-\alpha} (1-|w|)^{1-\beta} dA(z) dA(w) &\leq \\ c \int_{\mathbb{D}^2} \frac{1}{|1-z|^2} \frac{1}{|1-w|^2} (1-|z|)^{1-\alpha} (1-|w|)^{1-\beta} dA(z) dA(w) &\leq c_{\alpha, \beta}. \end{aligned}$$

Le résultat découle alors du lemme 11 avec $\epsilon = \min\{1-\alpha, 1-\beta\}$. \square

Preuve du théorème 2 : Soit u la fonction du lemme 12. On pose $v := u^2$, on a $v \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$. Soit $\pi : \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+ \rightarrow \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+ / I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(f)$ la surjection canonique. Le spectre de $\pi(v)$ est réduit à $\{0\}$, donc l'application

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \pi(v))^{-1}$$

est analytique sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Le lemme 12 entraîne que

$$\operatorname{Im}(v) \subset \mathcal{S} := \{z \in \mathbb{C} \setminus -\infty, 0[: |z|^{1/2} - 1| \leq 1\}.$$

D'après le Lemme 4 on a $\mathcal{C}_1(\delta, \mathcal{A}_{\alpha, \beta}) \leq c\delta^{-c_{\alpha, \beta}}$. Donc il existe un entier N tel que pour tout $\lambda < 0$ on a

$$\|\varphi(\lambda)\| \leq \|(\lambda - v)^{-1}\|_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+} \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, \mathcal{S})^N} \leq \frac{c}{|\lambda|^{2N}}, \quad (23)$$

Soit $\lambda \neq 0$. On pose

$$\delta(\lambda) := \inf\{|\lambda - v(z, w)| + |f(z, w)| : (z, w) \in \mathbb{D}^2\}.$$

Soit

$$\mathcal{Q}_\lambda := \{(z, w) \in \overline{\mathbb{D}}^2 : |v(z, w) - \lambda| \leq |\lambda|/2\}.$$

Nous avons

$$|\lambda - v(z, w)| + |f(z, w)| \geq |\lambda - v(z, w)| \geq \frac{|\lambda|}{2}, \quad (z, w) \notin \mathcal{Q}_\lambda.$$

D'après le lemme 12, on a

$$\inf\{|1 - z|^2, |1 - w|^2\} \geq c_1 |v(z, w)| \geq c_1 |\lambda|/2, \quad (z, w) \in \mathcal{Q}_\lambda,$$

donc, pour tout $\varepsilon > 0$

$$|\lambda - v(z, w)| + |f(z, w)| \geq |f(z, w)| \geq c_\varepsilon e^{-\varepsilon|\lambda|^{-1/2}}, \quad (z, w) \in \mathcal{Q}_\lambda.$$

Par conséquent

$$\delta(\lambda) \geq c_\varepsilon e^{-\varepsilon|\lambda|^{-1/2}}. \quad (24)$$

D'après le Lemme 5, il existe $h_1, h_2 \in \mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+$ tel que

$$\begin{cases} (\lambda - v(z))h_1(z) + f(z)h_2(z) = 1, \\ \|h_1\|_{\alpha, \beta}^2 + \|h_2\|_{\alpha, \beta}^2 \leq \delta(\lambda)^{-c_{\alpha, \beta}}. \end{cases}$$

De l'inégalité (24), nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\varphi(\lambda)\|_{\alpha, \beta} &= \|(\lambda - \pi(v))^{-1}\|_{\alpha, \beta} = \|\pi(h_1)\|_{\alpha, \beta} \\ &\leq \delta(\lambda)^{-c_{\alpha, \beta}/2} \leq c_\varepsilon e^{\varepsilon|\lambda|^{-1/2}}, \quad \lambda \neq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Soit $g \in (\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+/I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(f))^*$. On définit φ_g par

$$\lambda \longrightarrow \varphi_g(\lambda) := \langle \varphi(\lambda), g \rangle.$$

Le théorème classique de Phragmén-Lindelöf appliqué à la fonction φ_g nous permet de déduire, en utilisant les inégalités (23) et (25), que φ_g est un polynôme en $1/\lambda$ de degré inférieur à $2N$. Le théorème de Banach-Steinhaus nous donne $\pi(v)^{2N} = 0$ et $v^{2N} \in I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(f)$. Soit maintenant la fonction g définie par

$$g(z, w) = (1 - z)(1 - w)((1 - z)^{1/2} + (1 - w)^{1/2})^{8N} \quad (z, w) \in \mathbb{D}^2.$$

Puisque

$$v^{2N}g(z, w) = (1 - z)^{4N+1}(1 - w)^{4N+1},$$

$(1 - z)^{4N+1}(1 - w)^{4N+1} \in I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(f)$. Pour conclure il suffit de remarquer que pour tout n

$$I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}((1 - z)^n(1 - w)^n) = I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}((1 - z)(1 - w)) = I_{\mathcal{A}_{\alpha, \beta}^+}(\{1\} \times \overline{\mathbb{D}} \cup \overline{\mathbb{D}} \times \{1\})$$

ce qui termine la preuve.

Remerciement. Les auteurs tiennent à remercier le professeur Alexander Borichev pour les discussions concernant ce travail.

REFERENCES

- [1] A. ALEMAN; A. DAHLNER, *Uniform Spectral Radius And Compact Gelfand Transforms*, Studia Math. 172 (2006), 25–46.
- [2] O. EL-FALLAH; A. EZZAARAOUI, *Majorations uniformes de normes d'inverses dans les algèbres de Beurling*. J. London Math. Soc. (2) 65 (2002), no. 3, 705–719.
- [3] O. EL-FALLAH; N. K. NIKOLSKI; M. ZARRABI, *Estimates for resolvents in Beurling-Sobolev algebras*. translation in St. Petersburg Math. J. 10 (1999), no. 6, 901–964.
- [4] O. EL-FALLAH; M. ZARRABI, *Estimations des solutions de l'équation de Bezout dans les algèbres de Beurling analytiques*. Math. Scandinavica 96 (2005) 307–319.
- [5] J. ESTERLE; E. STROUSE; F. ZOUAKIA, *Closed Ideals of the algebra of absolutely convergent Taylor series*. Bulletin AMS 31 (1994) 39–43.
- [6] H. HEDENMALM, *Outer functions in function algebras on the bidisc*. Trans. Amer. Math. Soc. 306(1988), 697–714.
- [7] H. HEDENMALM, *Outer functions of several complex variables*. J. Funct. Anal. 80 (1988), 9–15.
- [8] H. HEDENMALM, *Translates of functions of two variables*. Duke Math. J. 58 (1989), no.1, 251–297.
- [9] K. HOFFMAN, *Banach spaces of analytic functions*, (Prentic Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962).
- [10] J. P. KAHANE, *Idéaux fermés dans certaines algèbres de fonctions analytiques*, Actes Table Ronde Int. C.N.R.S. Montpellier, Lect. Notes 336, Springer-Verlag 1973, 5–14.
- [11] P. KOOSIS *Introduction to H_p spaces*. Second edition. Cambridge Tracts in Mathematics, 115. Cambridge, 1998.
- [12] B. YA. LEVIN, *Translates of functions of two variables*, Problem 7.20, Linear and Complex Analysis Problem Book, 199 Research Problems, Edited by V. P. Havin, S. V. Hruscev and N. K. Nikolski. Lecture Notes in Math. vol. 1043, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [13] N. K. NIKOLSKII, *In search of the invisible spectrum*, Ann. Inst. Fourier 49 (1999) 1925–1998.

BRAHIM BOUYA & OMAR EL-FALLAH. DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUE.
 UNIVERSITE MOHAMED V, B.P. 1014. RABAT MAROC
Current address: Brahim Bouya. Laboratoire Paul Painlevé, Université des Sciences
 et Technologies de Lille, Bât. M2, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail address: brahimbouya@gmail.com, elfallah@fsr.ac.ma

KARIM KELLAY. LATP-CMI. UNIVERSITE DE PROVENCE. 39 RUE F.JOLIOT CURIE.
 13453 MARSEILLE CEDEX 13 FRANCE
E-mail address: kellay@cmi.univ-mrs.fr